Societatea de Ştiinţe Matematice din România Ministerul Educaţiei Naţionale

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Egy számsorozatot nevezzünk *teljesnek*, ha elemei nullától különböző természetes számok és minden nullától különböző természetes számnak legalább egy többszöröse tagja a sorozatnak.

Igazold, hogy egy számtani haladvány akkor és csak akkor teljes, ha a rációja osztja a sorozat első elemét!

2. feladat Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan másodfokú függvény, amelyre igaz az alábbi állítás:

Bármely m és n valós szám esetén az $f(x) = mx+n$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a $g(x) = mx+n$ egyenletnek van megoldása.

Igazold, hogy a f és g függvények egyenlőek egymással!

3. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében vegyünk fel egy P pontot. A D, E és F pontok az AP, BP és CP egyenesek metszéspontjai a $[BC]$, $[CA]$ illetve $[AB]$ oldalakkal.

a) Igazold, hogy a DEF háromszög területe legfeljebb egynegyede az ABC háromszög területének!

b) Igazold, hogy a DEF háromszögbe írt kör sugara legfeljebb egynegyede az ABC háromszög köré írt kör sugarának!

4. feladat. Adott az n nem nulla természetes szám és az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{, ha } x \text{ páros} \\ \dfrac{x-1}{2} + 2^{n-1} & \text{, ha } x \text{ páros} \end{cases} .$$

függvény.

Határozd meg az

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ darab } f})(x) = x\}.$$

halmaz elemeit!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.