Societatea de Ştiinţe Matematice din România   Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(a^2+ab+b^2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:
(1) A nu este corp,
(2) oricare ar fi x un element neinversabil al lui A, există un număr întreg $m \geq 1$, care depinde de x, astfel încât

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

Să se arate că:
(a) $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$,
(b) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil $x \in A$.

Problema 3. Fie $a \in (0,1)$ şi $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor crescătoare $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$, astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Să se determine:

(a) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ cu proprietatea că $\underbrace{1+\cdots+1}_{m \text{ ori}} \neq 0$, $m = 2,\ldots,n$, $f \in K[X]$ un polinom de grad n şi G un subgrup al grupului aditiv $(K,+)$, $G \neq K$. Să se arate că există $a \in K$, astfel încât $f(a) \notin G$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.